Сайт teach-in лекции ученых МГУ https://teach-in.ru/lecture/2019-09-04-Penskoy

Общее время: 1:12:59

Пенской Алексей Викторович

Геометрическая теория конических сечений

Историческая часть. Древняя Греция, Евклидова геометрия, треугольники, окружности, четырехугольники и т.д. все это вы учили в школе, это прекрасно. Тем не менее, еще в Древней Греции, в эллинистический период уже изучалось что-то за пределами этих объектов, а именно конические сечения. Это то, чем занимался Аполлоний Пергский. Пергский – это не фамилия, просто он родом из города Пергия, фамилий у древних греков не было. Что он изучал? Если мы возьмем конус, самый простой, обычный круговой конус. Давайте я нарисую его более правильно, потому что у него полный… я нарисовал только половину конуса, а настоящий конус, у него есть две полы. Вопрос, который рассматривал Аполлоний Пергский – что будет, если пересекать его плоскостью, что за множество точек у вас будет возникать? Вы еще силами школьной геометрии можете доказать следующее, если у вас плоскость перпендикулярна оси конуса, то в сечении у вас будет окружность. Тем не менее, можно спросить, что будет, если вы будете пресекать другими плоскостями, которые не обязательно ортогональны оси конуса. Оказывается, что ответ разный, сегодня мы об этом поговорим. Изучать его тоже можно по-разному.

Есть то, что называется геометрическая теория – это теория близкая к тому, что вы делаете в школе, то что называется синтетическая геометрия. Мы строим аксиоматику, то что есть точки, отрезки, плоскости, аксиомы выводят в теоремы и т.д. Это то, как это делал Аполлоний Пергский. Мы немножко поговорим об этом, а дальше мы двинемся в другой подход, это подход аналитический. В свое время Декарт понял, что можно описывать точки плоскости и пространства, приписывая им координаты. Вы немного это учили в школе, значит, у вас там были декартовы координаты в плоскости и в пространстве. Вы уже знаете, что некоторые геометрические объекты удобно описывать уравнениями. Вы знаете, что прямая в плоскости задается линейным уравнением – $ax+by+c=0$. Вы знаете, что окружность описывается уравнением - $x^2+y^2=r^2$.

Аналитический подход заключается в том, чтобы изучать геометрические объекты с помощью уравнений. Этот подход является наиболее продуктивным, поэтому мы очень быстро от геометрической теории перейдем к аналитической теории. Мы будем изучать с помощью аналитического подхода. Поэтому наш предмет и называется аналитическая геометрия. Название это в достаточной степени историческое. В разные времена под этим подразумевались разные вещи. Если вы откроете французские учебники 19 века, то вы увидите, что аналитическая геометрия в значительной степени – это другие вещи.

Давайте начнем с темы «Геометрическая теория конических сечений». Эти самые конические сечения часто называют словом «коники». Коническое сечение = коника. Я призываю быть несколько осторожным в терминологии, когда дальше у вас будет аналитический подход из-за того, что они описываются уравнениями второго порядка, мы их будем называть квадрики, но квадрики несколько шире, чем коники, потому что у вас бывают уравнения второго порядка, которые описывают вовсе не конические сечения.

Например, если вы посмотрите на уравнения x y = 0, это уравнение второго порядка, x y – это многочлены второй степени. Тем не менее, легко понять, что оно описывает крест, ось x и ось y, это не коническое сечение. Я вас сразу предупреждаю, что квадрики – это коники плюс еще что-то. Коники – это только то, что получается с помощью конических сечений.

Как мы с вами докажем в сечении кругового конуса плоскости можно получить эллипс, гиперболу и пораболу, чтобы это доказать мне их сначала нужно как-то определить. Давайте сейчас этим и займемся.

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек, таких, что сумма расстояний от них до двух фиксированных точек (называемых фокусами эллипса) постоянно. У меня на сигнале, в моей группе сегодня спросили, что такое геометрическое место точек. Это такой старомодный, все еще употребляющийся термин из классической геометрии, который на самом деле эквивалентен слову «множество». Вы можете писать, что эллипсом называется множество точек. Эти точки мы называем фокусами эллипса. То есть что у вас происходит. У вас есть две фиксированных точки – F1, F2 – это фокусы. Вы смотрите на множество таких точек x, что (XF1)+(XF2)=2A, у вас есть постоянная, я буду ее назвать 2A. Сумма этих двух расстояний она одинакова. Расстояние обычно обозначается через 2C, расстояние между фокусами, как вы догадываетесь, чтобы это множество было осмысленным, нужно накладывать условия, что у нас a>c. Потому что если у вас a=c, то это будет просто отрезок F1, F2, а если меньше, чем c, то простое множество. Мы считаем, что это входит в определение a>c. Похожее определение у гиперболы. Для гиперболы мы будем делать точно то же самое, только мы вместо сумм расстояний будем брать модуль разности.

Гиперболой называется геометрическое место точек, таких, что модуль разности расстояний до двух фиксированных точек (называемых фокусами гиперболы) постоянен. Геометрическое место точек – это такое часто употребляемое заклинание, поэтому я для него буду употреблять стандартную аббревиатуру ГМТ. У вас есть фокус 1 фокус 2 - F1, F2 расстояние между ними обозначается 2c. У вас есть кривая x, условие заключается в том, что модуль (XF1) – (XF2)=2A. там у вас A был больше, чем C, а здесь нужно , чтобы a<c.

Третий персонаж, который у нас будет – это парабола. С параболой дело несколько хитро. Давайте дадим определение. Там у вас было два фокуса и что-то связанное с расстоянием между этими фокусами – или сумма постоянна или модуль разности постоянен, а для параболы у вас участники – это точка, которая называется фокусом параболы и прямая, она называется директрисой и свойство заключатся в том, что расстояние до фокуса и до директрисы равно.

Параболой называется геометрическое место точек равноудаленных от фиксированной точки, называемой фокусом, и фиксированной прямой, называемой директрисой. Здесь картина следующая – есть у вас прямая, есть фокус и у них есть точки. Расстояние от x и до прямой d равно длине xf - S (x,d)=(xf).

Давайте посмотрим, что у нас будет с коническими сечениями. У нас три типа кривых, которые достаточно разные, это обозначает, что у вас плоскость может пересекать круговой конус какими-то тремя принципиально разными способами.

Когда у меня плоскость была ортогональна оси конуса, у меня была окружность, если я буду ее наклонять, у меня начнут получаться эллипсы. С другой стороны ситуация может быть следующая, если плоскость наклонять, эллипс будет все более вытянутый, потом будет плоскость параллельно вот этой образующей, тогда получается парабола. У эллипса точка ехала, ехала и уехала на бесконечность. Когда мы с вами будем изучать проективную геометрию, мы увидим, что, в самом деле, парабола это просто эллипс, у которого одна точка на бесконечно удаленной прямой. Если мы будем наклонять эту плоскость дальше, то получится гипербола, почему? Потому что, если ее наклонить еще больше, эта плоскость начнет пересекать обе полы конуса. Если плоскость идет как-то вот так, то она будет здесь высекать одну часть гиперболы, и в другом месте тоже будет высекать часть гиперболы.

Лучше всего это уяснить, если нарисовать сечение. Давайте я нарисую сечение плоскостью. Это должна быть плоскость, которая ортогональна плоскости сечения и которая при этом содержит в себе ось конуса. Сечение плоскостью, ортогональной секущей плоскости и содержащей ось конуса. Если вы взяли ось конуса и взяли сечение плоскостью, которая проходит через ось конуса, что у вас будет в пересечении? Да, две пересекающихся прямых. Дальше ситуация будет простая. У вас есть плоскости, которые дают вам эллипс. Есть плоскости, которые параллельны одной из образующих. Такая плоскость даст мне параболу, а если я возьму плоскость изогнутую, наклоненную еще больше, то она даст мне гиперболу. Одна ветка гиперболы будет здесь, а другая здесь.

Давайте конус прочерчу более жирно, я взял через одну и ту же точку проходящие три разные плоскости, разной степени наклона. Если я наклоню чуть-чуть, у меня получается эллипс, если я наклоню так, что одна плоскость параллельна образующей, тогда у меня получается парабола. А если я взял и наклонил еще больше, так что она цепляет уже обе полы конуса и верхнюю и нижнюю, то у меня будет одна ветка здесь, а другая здесь, у меня будет гипербола. Эта картинка – это не доказательство, а доказательства в Античности они были очень сложные, то есть у Аполлония это были очень сложные доказаетльства.

Мы воспользуемся такой более поздней уже из нового времени конструкцией, которая называется шары Данделена. Это очень остроумная конструкция, которая доказывает нам наши свойства.

Давайте рассмотрим конструкцию шаров Данделена в случае эллипса. Сейчас я буду рисовать очень сложную картинку, в ней разобраться трудно, поэтому я буду рисовать ее поэтапно, постарайтесь рисовать ее вместе со мной, тогда у вас есть шанс, что вы поймете происходящее. Я взял специально картинку как ее обычно рисуют.

Эллипс лежит у нас в одном поле конуса, поэтому я нарисую здесь одну полу конуса, здесь есть вторая пола конуса, но она нам не очень интересна. Теперь я возьму секущую плоскость, здесь есть секущая плоскость. Она из секущего конуса что-то вырежет, мы еще не знаем, что это эллипс, но это будет эллипс, поэтому я его здесь нарисую. Теперь смотрите, что я сделаю. Представьте, что вы приходите к бабке покупать семечки, она сворачивает вам конус из бумаги, она вам не семечки продает, а подает вам тайный закодированный сигнал – шары Данделена. Представьте, что вы положили в конус, свернутый из бумаги какой-нибудь шарик, мячик. Вы понимаете, что он будет касаться по окружности. Что будет, если вы будете брать шарики все большего диаметра? У вас диаметр шарика будет расти и эта окружность будет двигаться все дальше, дальше и дальше.

Теперь представьте, что у вас есть наклонная плоскость. Я взял этот шарик положил его во внутрь, он где-то там в самом низу, и начал его увеличивать. Он у меня растет, эта окружность поднимается, поднимается, а потом в одной точке он касается у меня плоскости, я останавливаюсь. Это первый шар Данделена, он вписан внутрь конуса, и он касается нашей плоскости в некоторой точке F1. Эту конструкцию легко понять, если нарисовать наше сечение, которое мы очень любим. В сечении это будет вот что. Вот ваш конус. Вот наша плоскость π, а сечение этого шара будет у нас просто окружностью. Вам нужно будет просто в этот треугольник вписать окружность. Собственно говоря, это способ доказательства существования шара Данделена. Берете сечение, строите вписанную окружность, берете центр, а потом берете шар, у которого соответствующий радиус и соответствующий центр. Здесь он касается в двух точках, а здесь это будет такая окружность.

А теперь я сделаю вот что. Вот у меня этот конус из бумаги, у меня здесь лежит наклонная плоскость, а я возьму теперь очень большой шар, который вписан в этот конус и буду уменьшать его радиус, он будет у меня ползти вниз, пока не коснется этой плоскости с другой стороны. Фактически это значит, что я буду искать здесь такую окружность, которая будет касаться этих трех сторон треугольника. У меня будет какая-то такая картина. Я уже забыл как это называется в школьной геометрии, это какая-то внешне вписанная окружность, что-то такое. Но вы знаете, что она есть, у вас есть внешне вписанная окружность, она касается в трех точках, у нее есть центр, вы выходите опять в трехмерное пространство, берете этот самый центр и берете сферу с этим самым радиусом. Это нарисовать не просто, но я сделаю усилие. Она касается этой плоскости тоже в какой-то точке, я ее обозначу F2. Вот у меня F1, а вот у меня F2. Это точки, которых касаются шары Данделена, в секущей плоскости. Здесь в сечении он касается конуса в двух точках, но на самом деле здесь есть целая окружность, в которой он касается конуса.

А теперь, давайте мы заметим один факт. Он заключается в следующем, давайте я нарисую эту картинку еще раз, только с шарами. Вот первый шар, он касается конуса по этой окружности. Вот второй шар, он касается конуса тоже по какой-то окружности. Если я возьму на конусе луч, исходящий из вершины, давайте ее обозначим s, то у меня для любого луча, лежащем на этом конусе, это расстояние, лежащее между этими окружностями, оно будет одинаковое. Потому что эти окружности лежат в плоскости ортогональной оси конуса для любого луча эти расстояния – это лучи на конусе, не внутри конуса, а на конусе, то что называется образующие. У вас эти расстояния между этими окружностями везде будут одинаковые.

Теперь смотрите, что происходит. Я беру здесь любую точку, ее нужно выбрать так, чтобы картинка была читаемая. Давайте я выберу точку x, давайте я F1 перерисую сюда, а x я возьму здесь, да x на эллипсе. Это π пересечение с конусом - $\pi \cap c$. Давайте я через него проведу такой луч сх. Вот я взял этот луч, x лежит на конусе, поэтому этот луч на конусе. sx – луч на конусе. Смотрите, что я сделаю, пересечение с этой окружностью это x1, пересечение с этой окружностью у меня x2. X1 – это пересечение sx с шаром 1. X2 – это пересечение с sx с шаром 2.

Теперь давайте заметим, вспомним, у вас в школьной геометрии есть очень простой факт из жизни окружностей, что длина касательных к окружности из любой точки равна. Окружность, точка, длина этих двух касательных она равна. С шаром точно то же самое, потому что, если это шар, есть две точки касания, на самом деле для шара этих касательных гораздо больше, чем две, их бесконечно много, вы взяли сечение картинка у вас плоская, эти касательные равны. Если это шар, то у вас длина двух касательных к шару равна.

Теперь посмотрим на xx1 и xf1. Xx1 – это касательная к первому шару, но xf1 – это тоже касательная к этому шару, потому что xf1 лежит в плоскости, которой этот шар касается, то есть xx1 и xf1 – это две касательных к первому шару. Еще раз объясняю, почему это верно для xf1. xf1 – это отрезок, лежащий в плоскости π, потому что и x и f1 лежат в этой плоскости, эта плоскость касается этого шара в точке f1, поэтому xf1 – это касательная к этому шару. Но тогда по свойству касательных их длины равны, следовательно (xx1) = (xf1).

Ровно тоже самое верно и для отрезков xf2 и xx2 для второго шара. Аналогично из рассмотрения второго шара (xx2)=(xf2). Тогда получается, что сумма расстояния от (xf1)+(xf2)=(xx1)+(xx2)=(x1x2) постоянно

А мы с вами обсуждали, что расстояние между пересечением луча, включая эти две окружности, не зависит от выбора точки, оно всегда постоянно.

Тогда по определению эллипса – сечение является эллипсом. Это завершает это доказательство.

К сожалению, рисовать картинки стереометрические на плоскости – это очень сложно, я не сомневаюсь, что значительной части из вас трудно понять происходящее, поэтому обязательно сегодня вечером, когда придете домой, поэтапно нарисуйте первый шар, второй шар и обдумайте, что здесь происходит, это доказательство, оно чисто геометрическое.

Для гиперболы конструкция с шарами Данделена аналогична, поэтому я вам ее оставлю в качестве упражнения. Конструкция с шарами Данделена для гиперболы. Действительно, там ситуация похожа – у вас будет плоскость, два шара и т.д. Главное понять следующее – для эллипса все происходит в одном поле конуса, для гиперболы вам надо будет понять принципиальный вопрос – шары должны лежать в одном поле или в обоих полях по одному шару? Если вы это поняли, то будет вам счастье.

А в случае параболы он особый, потому что там всего один шар, поэтому нам его нужно рассмотреть отдельно. Случай параболы. Здесь конструкция хитрая. Это наш конус. По идее я сперва провожу плоскость, а потом вписываю шар. Я вам открою тайну, как часто бывает в геометрии, нарисовать проще в обратном порядке, что я и сделаю. Я возьму здесь шар, а здесь возьму плоскость, которая большая, здесь она проходит невидимо. И где-то здесь есть одна точка, в которой эта сфера касается. А здесь у нас сечение. Вершина конуса s, это шар Данделена. Плоскость будет параллельна этой линии и высекает какую-то кривую. У меня есть плоскость, давайте я напомню, что в сечении, то сечение, которое мы будем рассматривать, то картинка такая. Что будет, если я беру маленькую окружность и начинаю ее увеличивать? В какой-то миг она утыкается в эту плоскость. Соответственно в пространстве эта картинка устроена вот так, это не очень сфера, но ладно, рисование не было моей сильной стороной. Точка касания – это у меня F. F – точка касания шара Данделена и секущей плоскости π. Как мы с вами знаем, здесь будет окружность, по которой у меня сфера касается конуса. Эта окружность она лежит в какой-то плоскости, я проведу эту плоскость, здесь это важно. Здесь есть еще одна плоскость. $\pi 1$ – это плоскость, в которой лежит окружность, по которой шар Данделена касается конуса. $\pi 1$ – плоскость, содержащая окружность касания шара и конуса, то есть на сечении окружность касается двух прямых в двух точках, значит $\pi 1$ проходит ровно через них. Это сечение поможет вам понять, что есть что.

У нас есть фокус – это точка, в которой шар касается нашей секущей плоскости π, а еще у параболы, где-то должна быть директриса – это прямая. Откуда берется директриса? Директриса – это прямая, по которой пересекаются плоскости π и $\pi 1$. d – это прямая, по которой пересекаются π и $\pi 1$. $d = \pi \cap \pi 1$(директриса). На этом сечении – это наша точка, потому что эта прямая ортогональна плоскости, которой мы сечем. Нарисовать это в трехмерии – это да. Это лежит где-то тут эта самая d. Теперь, что надо делать. S – это вершина конуса, x – произвольная точка сечения.

Давайте я сделаю так, у меня эта часть параболы лежит на той части конуса, которую мы видим, а эта часть параболы лежит на части конуса, которую мы не видим. Где мне проще нарисовать x, чтобы не было уж совсем полного ужаса? Мне нужно будет нарисовать sx, xf еще с x спустить перпендикуляр на директрису. Вы же догадываетесь, что нам понадобится перпендикуляр к директрисе. Давайте я возьму невидимую часть, вот x, вот xf, вот есть xs, вот точка пересечения x1. Значит, sx пересекает плоскость $\pi 1$ в точке x1. $sx \cap \pi 1 = x1$. Как и раньше у нас длина x1=длине xf, потому что это две касательных к одному и тому же шару. Как и раньше xf и xx1 – две касательных их x к шару, поэтому длина (xf)=(xx1). Да, если это невидимая часть, то здесь она должна быть на невидимой стороне, это правда, рисование чертежей вещь сложная.

А теперь давайте сделаем последний рывок к счастью. Давайте из x опустим перпендикуляр на директрису – xy – перпендикуляр, опущенный из x на d. Картинка становится все более ясной. Приходите домой, берете очень большой лист бумаги и чертите очень большим. Я ограничен размером доски. Теперь нужно вспомнить один факт. Представьте, что у вас есть плоскость и есть какая-то точка, назовем ее временно x. А теперь представим, что у меня к этой плоскости есть две наклонных под одним и тем же углом, и таких наклонных очень много, тогда длина этих наклонных, как вы знаете, равна. Длины наклонных под одним углом из точки на плоскости равны. В нашем случае – это будет плоскость $\pi 1$, а две наклонные – это xx1 и xy. Представьте, что у вас есть плоскость, прямая, наклонная, а перпендикуляр к этой плоскости может соотноситься как-то очень криво. В этом ничего странного нет, но тогда у вас (xf)=(xx1)=(xy)= s(x1d). Поэтому эта парабола в смысле нашего определения.

Упражнение – найти этот угол. Этот угол, подсказка, связан с углом при растворе конуса. Он перпендикулярен к прямой, а не к плоскости.

Вам может показаться, что это было что-то ужасное, но я уверяю вас, что доказательства Аполлония Пергского были еще хуже. Как мы увидим с вами дальше с помощью аналитического метода, с помощью координат, все это можно получать гораздо легче, именно поэтому мы с вами и перейдем к аналитическому методу, тем не менее, я уверяю вас, что даже с помощью геометрической теории можно доказывать содержательные утверждения. Поэтому последняя вещь, которую я хочу вам сегодня рассказать, я хочу, чтобы мы обсудили оптические свойства коник. Да, меня поправили в перерыве, я забыл сказать одну важную вещь, когда мы рассматриваем коники, то мы требуем, чтобы секущая плоскость не проходила через вершину конуса.

Там где я определял коники, как конические сечения, пожалуйста, припишите себе, что секущая плоскость не должна проходить за вершину конуса.

Оптические свойства коник. Когда-то был очень популярен фантастический роман, который, по-видимому, мало кто из вас читал теперь уже, это роман Толстого «Гиперболоид инженера Гарина», там инженер Гарин строит некий агрегат, в котором есть гиперболоид, в него он засовывает какие-то горящие пирамидки и лучами, исходящими из этого гиперболоида, он испепеляет все вокруг. Я вам честно скажу, что почитать этот роман стоит, потому что фантастика вообще как литература так себе, потому что фантастику обычно пишут писатели, какого-то 33 уровня, как писатели, а Толстой был писатель, конечно, не Лев Николаевич Толстой, но все же, он был сильный, поэтому «Гиперболоид инженера Гарина» - это хорошая литература. Может как фантастика так себе, но как литература – это очень хорошо. Так вот, исходя из всего этого, что можно сказать про Толстого? Что зачет по аналитической геометрии он бы не сдал, потому что, если бы он знал аналитическую геометрию, у него был бы не гиперболоид инженера Гарина, а параболоид инженера Гарина, почему – это выяснится сейчас, когда мы обсудим оптические свойства коник.

Эти оптические свойства они следующие. Вот у нас есть эллипс. Вот у вас есть фокус и есть еще один фокус. Вы учили в школе физику, что говорит физика, что луч света отражается по закону – угол падения равен углу отражения. У эллипса есть замечательное свойство, если я выпущу луч света из одного фокуса, он отразится и придет во второй фокус. Что это значит? Это обозначает следующее, если мы возьмем касательную прямую, то у нас этот угол равен вот этому углу, угол падения равен углу отражения. Физически мы говорим, что у эллипса луч света исходящий из одного фокуса приходит во второй фокус, геометрически это значит, что если мы проведем касательную, то в точке касания углы между отрезком между лучом идущим из одного фокуса в другой фокус, эти углы они равны.

Какое есть оптическое свойство у гиперболы? Там это свойство такое хитренькое. Давайте нарисуем f1 f2, вот идет гипербола, что происходит? Давайте я нарисую такую картинку, я нарисую луч сюда и прямую сюда.

У гиперболы оптическое свойство заключается вот в чем – луч света, вышедший из одного фокуса, после отражения движется так, будто он вышел из другого фокуса. Это обозначает, если вы проведете здесь касательную, то у вас угол этот будет равен углу этому. Поэтому у гиперболы, если вы сделаете гиперболоид, это будет то, что если вы будете эту гиперболу вращать, и у вас образуется чаша. Если Гарин действительно построил бы гиперболоид и поместил бы сюда горящую пирамидку из адского инфернального состава, у вас после отражения все эти лучи расходились бы во все стороны, потому что они бы двигались как лучи, идущие из другого фокуса. Он осветил бы широко и все.

Что происходит с параболой? Оптическое свойство параболы такое интересное. Вот у меня есть парабола, вот у меня есть фокус, а вот у меня есть директриса. Я могу через фокус провести прямую, которая ортогональна директрисе. Это называется ось параболы. Для параболы оптическое свойство заключается в том, что у вас лучи выходящие из фокуса отражаются так, что они всегда параллельны оси. Картинка будет такая, отразилось здесь и идет параллельно оси, отразилось здесь и идет параллельно оси, отразилось здесь и идет параллельно оси. Если бы у Гарина был параболоид, то у него отраженные лучи, двигались бы узким потоком, значит, можно было бы там реализовывать фантазии Толстого.

Я пока расскажу вам одно очень интересное следствие, оно очень крутое. Если у меня есть две коники, у которых одинаковые фокусы, они называются конфокальными. Давайте посмотрим на конфокальный эллипс и на конфокальную с ним гиперболу. Есть такая замечательная книга геометрия Берже в двух томах, в которой есть все и даже больше, но если вы ее откроете, то вы поймете, что вы еще очень маленькие и не приспособленные. Что я хочу сделать? Давайте я рассмотрю касательную к гиперболе и касательную к эллипсу в точке их пересечения. А теперь давайте я сопоставлю эллипсы и гиперболы в этой точке пересечения. У меня есть прямая, идущая отсюда давайте я ее продлю, и прямая, идущая отсюда. Что мне говорит оптическое свойство эллипса? Он мне говорит, что этот угол равен этому углу, давайте я назову эти углы альфа. А теперь что мне говорит оптическое свойство для гиперболы? Оно мне говорит, что этот угол бета равен другому углу бета. Этот угол как вертикальный равен этому, поэтому здесь тоже есть бета.

Давайте посмотрим, что происходит здесь – $\alpha+\beta+\beta+\alpha=\pi$, из этого следует, что два альфа плюс два бета равно пи, это значит, что $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Но альфа плюс бета это угол между касательными, это значит, что конфокальные эллипс и гипербола ортогональны друг к другу. Это совершенно поразительный факт. Пусть у вас есть два заданных фокуса f1 и f2 ивы можете строить разные эллипсы с этими фокусами, у вас сумма расстояний до этих фокусов будет разной и у вас будут получаться разные эллипсы, такие конфокальные эллипсы – все больше и больше и так далее. У них одинаковые фокусы, поэтому одинаковые к параметру c, но у них разная сумма расстояний, у них разные параметры a.

А теперь я буду делать тоже самое с гиперболами. Я буду сперва брать гиперболу такую, потом вот такую и здесь, так как они конфокальные, то у меня все углы пересечения в этой картинке, они будут ортогональными. Если я возьму семейство конфокальных эллипсов и гипербол, то у меня все углы будут ортогональны. На самом деле это замечательная вещь. Вот вы в дальнейшем будете изучать дифференциальные уравнения, чтобы проинтегрировать дифференциальные уравнения, нужно выдумать замену переменных такую, чтобы в них у вас уравнение стало проще. То есть вы уже знаете, допустим, в плоскости декартовы координаты, где у вас каждая точка описывается абсциссой и ординатой, а еще вы знаете координаты скорей всего полярные, где у вас каждая точка описывается расстоянием до начала координат и углом до оси абсцисс.

Если вы вспомните, то эти координаты замечательны тем, что они что называется прямоугольные. Это обозначает, что у вас линии, когда одна координата фиксирована, они ортогональны линиям, когда другая координата фиксирована. Линия x равно константа они все ортогональны y= константе. Если возьмете полярную систему координат, то у вас, когда постоянный угол у вас получается луч, а когда постоянный радиус у вас получаются окружности, они тоже ортогональны друг другу. Такие координаты называются ортогональными и среди всех координат, которые есть это самые крутые и навороченные координаты.

Вы можете ввести, что называется эллиптические координаты. Если я возьму четверть, то у меня каждая точка здесь, она является пересечением одной гиперболы и одного эллипса. Эллипсы описываются своим параметром, а гипербола описывается своим параметром h штрих. У меня это задает то, что называется эллиптической координатой точки. Этот факт, который я вам рассказал, обозначает, что эта система координат тоже эллиптическая, потому что линии уровня , когда один параметр фиксированный и другой параметр фиксированный, они ортогональны. Как вы видите какие-то элементарные вещи из аналитической геометрии, дают вам какие-то значимые вещи в дальнейшем.

Итог. Оптические свойства гиперболы и эллипса и параболы я докажу вам в следующий раз, а сейчас вы уже знаете, что конфокальные эллипсы и гиперболы они обязательно ортогональны друг другу и у вас возникает вот такая картинка. У вас есть два дня, чтобы подумать, что будет аналогом этого в мире парабол. Здесь у вас есть гипербола и эллипсы, у которых одинаковые фокусы, у парабол за душой есть фокус и директриса, как бы там придумать какое-то семейство. Подумайте и будет вам счастье.